ECO 431 - annales d'examen

Marie-Laure Allain Pierre Boyer

2020

ECO 431 - Microéconomie
Marie-Laure Allain et Pierre Boyer
Examen, novembre 2019

Polycopié, transparents et notes personnelles du cours autorisés. Les calculatrices sont autorisées. Merci de répondre aux questions 1 et 2 sur la copie rose et aux exercices 3 et 4 sur la copie blanche.

Exercice 1 : *Discrimination par les prix (3 points).*

Un monopole peut vendre sa production sur deux marchés distincts. Il produit le bien avec un cout marginal constant c supposé nul. La demande sur le premier marché est

$$D_1(p_1) = 100 - p_1$$

La demande sur le second marché est

$$D_2(p_2) = 100 - 2p_2$$

1. La discrimination par les prix est autorisée. Quel est le prix fixé par le monopole sur chaque marché ? Calculez la quantité vendue, le surplus des consommateurs sur chaque marché, le profit total du monopole et le surplus social total.
2. La discrimination par les prix est maintenant interdite. Quel est le prix fixé par le monopole sur les deux marchés ? Calculez la quantité vendue, le surplus des consommateurs sur chaque marché, le profit total du monopole et le surplus social total.
3. Décrivez et commentez l'effet de l'interdiction de la discrimination par les prix sur ce marché.

Exercice 2 : *Différenciation par la qualité (7 points).*

On considère un marché sur lequel sont disponibles deux biens indivisibles de qualités différentes, notées s_1 et s_2. On suppose que

$$0 < s_1 < s_2 < 1.$$

Les consommateurs ont des goûts pour la qualité hétérogènes. La masse totale des consommateurs est 1. Chaque consommateur peut acheter zéro ou une unité de bien au total : en particulier, il ne peut pas acheter une unité de chacun des deux biens. Chaque consommateur est caractérisé par un paramètre θ : son utilité vaut

$$U = V + \theta s - p$$

quand il achète une unité de bien de qualité s au prix p ; son utilité vaut 0 s'il ne consomme pas de bien. On supposera tout au long de l'exercice que V est suffisamment élevé pour que le marché soit couvert à l'équilibre, c'est-à-dire que tous les consommateurs achètent une unité de bien à l'équilibre. On suppose que les paramètres θ sont distribués selon une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On considère les prix et les qualités comme fixés. Quelle est la décision d'achat du consommateur caractérisé par θ lorsque les deux biens sont proposés aux prix p_1 et p_2 ?
2. Quelle est la demande qui s'adresse à chaque produit en fonction de p_1, p_2, s_1 et s_2 ? On traitera les cas $p_1 < p_2$ et $p_1 \geq p_2$.

3. On suppose que les deux biens sont produits par deux entreprises, notées 1 et 2, qui produisent avec un coût marginal constant normalisé à 0. Les entreprises sont en concurrence imparfaite, et se font concurrence en prix.
   (a) On considère les qualités comme fixées. Quelle est la meilleure réponse de chaque entreprise face au prix de son concurrent ? Déterminer l'équilibre de Nash du jeu de concurrence en prix. Ecrire le profit de chaque entreprise, et comparez les profits des deux entreprises. Comment varient ces profits en fonction de la qualité des deux biens ?
   (b) Avant le jeu de concurrence en prix, les deux entreprises doivent choisir chacune la qualité de son produit, $s_1 \in [0,1]$ et $s_2 \in [0,1]$. Quels niveaux de qualité choisissent-elles ? Commentez.

Exercice 3 : *Assurance et optimalité de Pareto (3 points).* Considérons un individu avec fonction

d'utilité $U(C) = ln(2C)$, où C est la consommation, et un revenu de 40000 euros. L'individu a un risque d'avoir un accident qui se réalise avec probabilité $0,02$. Cet accident génère un dommage de 30000 euros.

1. Qu'est-ce qu'une prime actuarielle ? Calculer cette prime dans notre cas.
2. Quel est la quantité d'assurance que souhaite acheter l'individu lorsque la prime d'assurance est une prime actuarielle ? Commenter.
3. Quel est l'optimum de Pareto sur notre marché d'assurance ? Commenter.

   Supposons maintenant qu'une compagnie d'assurance a le monopole sur notre marché.
4. Quel va être le prix offert pour une quantité d'assurance donnée ?
5. L'individu va-t-il acheter de l'assurance sur ce marché ? Obtenons-nous un optimum de Pareto ?
6. L'État devrait-il intervenir sur ce marché ?

Exercice 4 : *Aléa moral et assurance (7 points).*

Un consommateur dispose d'une richesse $w > 1$ et fait face à un risque d'accident. En cas d'accident il perd une somme $d < w$. La probabilité d'accident est égale à p. Le consommateur évalue ses risques au moyen d'une fonction d'utilité $U(\cdot)$, avec $U'(.) > 0$ and $U''(.) < 0$. Une compagnie d'assurance propose un contrat qui promet un montant de remboursement Q (choisi par le consommateur) en échange du paiement d'une prime $T = \pi Q$.

1. Pour une valeur donnée de π calculer le montant Q d'assurance choisi par le consommateur. Commenter.
2. Quelle relation doivent vérifier π et p pour que la compagnie d'assurance ne fasse pas de pertes ? Quelle sera la quantité d'assurance choisie à ce prix ?

Si le consommateur peut maintenant influencer sa probabilité d'accident par une variable d'auto-protection $e \in \{0,1\}$. Le consommateur a le choix d'un niveau d'auto-protection e, mais il doit payer un coût associé $\psi(e)$ (avec $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = \psi$), tel que la probabilité d'accident devient $p(e)$, avec $p(0) > p(1)$. Son utilité espérée est

$$EU(e) = p(e)U(w-d) + (1-p(e))U(w) - \psi(e)$$

3. Quel est le niveau d'effort s'il n'y a pas d'assurance offerte ?

4. On suppose que la compagnie offre des primes actuarielles, peut observer parfaitement la variable e et qu'elle peut donc pratiquer des prix personnalisés. Caractériser les valeurs de e et Q à l'optimum social. Est-il optimal d'avoir $e > 0$? Représenter ces contrats dans un graphique avec pour axe des abscisses Q et axe des ordonnées T.
5. On suppose que la compagnie ne peut pas observer la variable e et que le montant des primes est donc indépendant de e. En supposant toujours un profit nul pour l'assureur, montrer graphiquement un exemple de contrats qui seraient possibles à l'équilibre. Quelles propriétés ont les contrats dans ce cas ?

ECO 431 - Microéconomie
Marie-Laure Allain et Pierre Boyer
Examen, novembre 2019 - CORRIGE

Polycopié, transparents et notes personnelles du cours autorisés. Les calculatrices sont autorisées. Merci de répondre aux questions 1 et 2 sur la copie rose et aux exercices 3 et 4 sur la copie blanche.

Exercice 1 : *Discrimination par les prix (3 points).*

Un monopole peut vendre sa production sur deux marchés distincts. Il produit le bien avec un cout marginal constant c. on supposera $c \leq 100$. La demande sur le premier marché est

$$D_1(p_1) = 100 - p_1$$

La demande sur le second marché est

$$D_2(p_2) = 100 - 2p_2$$

1. La discrimination par les prix est autorisée. Quel est le prix fixé par le monopole sur chaque marché ? Calculez la quantité vendue, le surplus des consommateurs sur chaque marché, le profit total du monopole et le surplus social total.
   Sur le marche 1, le monopole maximise son profit $(p_1 - c)(100 - p_1)$ en fixant le prix $p_1 = \frac{100+c}{2}$. La quantité vendue est $q_1 = \frac{100-c}{2}$. Le surplus des consommateurs est alors $\frac{q_1^2}{2} = \frac{(100-c)^2}{8}$.
   On notera que le marché 2 n'existe que si $c \leq 50$ (sinon aucun échange ne peut avoir lieu car le coût de production est plus élevé que la valuation la plus forte). On supposera dès lors que $c \leq 50$. Sur le marche 2, le monopole maximise son profit $(p_2 - c)(100 - 2p_2)$ en fixant le prix $p_2 = \frac{100+2c}{4}$. La quantité vendue est $q_2 = \frac{100-2c}{2}$. Le surplus des consommateurs est alors $\frac{q_2^2}{16} = \frac{(100-2c)^2}{16}$.
   Le profit total du monopole est $\frac{(100-c)^2}{4} + \frac{(100-2c)^2}{8}$. Le surplus social total est donc $\frac{(100-c)^2}{4} + \frac{(100-2c)^2}{8} + \frac{(100-2c)^2}{16} + \frac{(100-c)^2}{8} = \frac{3(100-c)^2}{8} + \frac{3(100-2c)^2}{16}$.
2. La discrimination par les prix est maintenant interdite. Quel est le prix fixé par le monopole sur les deux marchés ? Calculez la quantité vendue, le surplus des consommateurs sur chaque marché, le profit total du monopole et le surplus social total.
   Si le monopole choisit de vendre sur les deux marchés, il maximise son profit $(p - c)(200 - 3p)$ en fixant le prix $p^N = \frac{200+3c}{6}$, avec $p_2 < p^N < p_1$. Il vend les quantités $q_1^N = \frac{400-3c}{6}, q_2^N = \frac{100-3c}{3}$. q_2 est positive si $c \leq \frac{100}{3}$; dans ce cas, il fait un profit $\frac{(200-3c)^2}{12}$ plus élevé que celui qu'il réaliserait sur un seul marché (en excluant les consommateurs du marché 2). Le surplus des consommateurs sur le marché 1 est alors $\frac{(400-3c)^2}{72}$, et sur le marché 2 $\frac{(100-3c)^2}{36}$.
3. Décrivez et commentez l'effet de l'interdiction de la discrimination par les prix sur ce marché.
   Quand c est faible ($c \leq \frac{100}{3}$) ette interdiction entraine une hausse des prix sur le marché 2 et une baisse sur le marché 1 : le surplus des consommateurs augmente sur le marché 1 et diminue sur l'autre. Le profit total du monopole est plus faible sous l'interdiction, mais le surplus total est plus élevé ($\Delta S = \frac{3.100^2}{16} > -\Delta\pi = \frac{100^2}{24}$).

Exercice 2 : *Différenciation par la qualité (7 points).*

On considère un marché sur lequel sont disponibles deux biens indivisibles de qualités différentes, notées s_1 et s_2. On suppose que

$$0 < s_1 < s_2 < 1.$$

Les consommateurs ont des goûts pour la qualité hétérogènes. La masse totale des consommateurs est 1. Chaque consommateur peut acheter zéro ou une unité de bien au total : en particulier, il ne peut pas acheter une unité de chacun des deux biens. Chaque consommateur est caractérisé par un paramètre θ : son utilité vaut

$$U = V + \theta s - p$$

quand il achète une unité de bien de qualité s au prix p ; son utilité vaut 0 s'il ne consomme pas de bien. On supposera tout au long de l'exercice que V est suffisamment élevé pour que le marché soit couvert à l'équilibre, c'est-à-dire que tous les consommateurs achètent une unité de bien à l'équilibre. On suppose que les paramètres θ sont distribués selon une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On considère les prix et les qualités comme fixés. Quelle est la décision d'achat du consommateur caractérisé par θ lorsque les deux biens sont proposés aux prix p_1 et p_2 ?

   On a supposé que V était suffisamment élevé pour que chaque consommateur achète toujours l'un des deux biens. Le problème est donc de savoir lequel des deux biens il achète : il achete le bien 1 si $V + \theta s_1 - p - 1 > V + \theta s_2 - p_2$, c'est-a-dire lorsque $p_2 - p_1 \geq \theta(s_2 - s_1)$.
2. Quelle est la demande qui s'adresse à chaque produit en fonction de p_1, p_2, s_1 et s_2 ? On traitera les cas $p_1 < p_2$ et $p_1 \geq p_2$.
   - Si $p_1 \geq p_2$, le consommateur prefere toujours le bien 2 ; tant que $V > p_2 - \theta s_2$ on a $d_1 = 0, D_2 = 1$.
   - Si $p_1 \leq p_2$, on a $D_1 = min\frac{p_2-p_1}{s_2-s_1}, 1$ et $D_2 = 1 - min\frac{p_2-p_1}{s_2-s_1}, 1$.
3. On suppose que les deux biens sont produits par deux entreprises, notées 1 et 2, qui produisent avec un coût marginal constant normalisé à 0. Les entreprises sont en concurrence imparfaite, et se font concurrence en prix.
   (a) On considère les qualités comme fixées. Quelle est la meilleure réponse de chaque entreprise face au prix de son concurrent ? Déterminer l'équilibre de Nash du jeu de concurrence en prix. Ecrire le profit de chaque entreprise, et comparez les profits des deux entreprises. Comment varient ces profits en fonction de la qualité des deux biens ?

   On suppose p_2 fixé ; La meilleure reponse de 1 est le prix qui maximise son profit $p_1(min\frac{p_2-p_1}{s_2-s_1}, 1)$, soit $p_1^{BR} = \frac{p_2}{2}$ en supposant p_2 dans une zone dans laquelle la demande est positive pour 2. De même la

   (b) Avant le jeu de concurrence en prix, les deux entreprises doivent choisir chacune la qualité de son produit, $s_1 \in [0, 1]$ et $s_2 \in [0, 1]$. Quels niveaux de qualité choisissent-elles ? Commentez.

Exercice 3 : *Assurance et optimalité de Pareto (3 points).* Considérons un individu avec fonction

d'utilité $U(C) = ln(2C)$, où C est la consommation, et un revenu de 40000 euros. L'individu a un risque d'avoir un accident qui se réalise avec probabilité 0, 02. Cet accident génère un dommage de 30000 euros.

1. Qu'est-ce qu'une prime actuarielle ? Calculer cette prime dans notre cas.

2. Quel est la quantité d'assurance que souhaite acheter l'individu lorsque la prime d'assurance est une prime actuarielle ? Commenter.
3. Quel est l'optimum de Pareto sur notre marché d'assurance ? Commenter.

   Supposons maintenant qu'une compagnie d'assurance a le monopole sur notre marché.
4. Quel va être le prix offert pour une quantité d'assurance donnée ?
5. L'individu va-t-il acheter de l'assurance sur ce marché ? Obtenons-nous un optimum de Pareto ?
6. L'État devrait-il intervenir sur ce marché ?

Exercice 4 : *Aléa moral et assurance (7 points).*

Un consommateur dispose d'une richesse $w > 1$ et fait face à un risque d'accident. En cas d'accident il perd une somme $d < w$. La probabilité d'accident est égale à p. Le consommateur évalue ses risques au moyen d'une fonction d'utilité $U(\cdot)$, avec $U'(.) > 0$ and $U''(.) < 0$. Une compagnie d'assurance propose un contrat qui promet un montant de remboursement Q (choisi par le consommateur) en échange du paiement d'une prime $T = \pi Q$.

1. Pour une valeur donnée de π calculer le montant Q d'assurance choisi par le consommateur. Commenter.
2. Quelle relation doivent vérifier π et p pour que la compagnie d'assurance ne fasse pas de pertes ? Quelle sera la quantité d'assurance choisie à ce prix ?

Si le consommateur peut maintenant influencer sa probabilité d'accident par une variable d'auto-protection $e \in \{0, 1\}$. Le consommateur a le choix d'un niveau d'auto-protection e, mais il doit payer un coût associé $\psi(e)$ (avec $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = \psi$), tel que la probabilité d'accident devient $p(e)$, avec $p(0) > p(1)$. Son utilité espérée est

$$EU(e) = p(e)U(w - d) + (1 - p(e))U(w) - \psi(e)$$

3. Quel est le niveau d'effort s'il n'y a pas d'assurance offerte ?
4. On suppose que la compagnie offre des primes actuarielles, peut observer parfaitement la variable e et qu'elle peut donc pratiquer des prix personnalisés. Caractériser les valeurs de e et Q à l'optimum social. Est-il optimal d'avoir $e > 0$? Représenter ces contrats dans un graphique avec pour axe des abscisses Q et axe des ordonnées T.
5. On suppose que la compagnie ne peut pas observer la variable e et que le montant des primes est donc indépendant de e. En supposant toujours un profit nul pour l'assureur, montrer graphiquement un exemple de contrats qui seraient possibles à l'équilibre. Quelles propriétés ont les contrats dans ce cas ?

ECO 431 - Microéconomie
Marie-Laure Allain et Pierre Boyer
Examen, novembre 2018

Polycopié, transparents et notes personnelles du cours autorisés. Les calculatrices sont autorisées. L'épreuve comprend 4 exercices. Rédiger les réponses aux exercices 1-2 sur les copies roses et 3-4 sur les copies jaunes.

Exercice 1 : *Choix de qualité par un monopole.* 5 points

On considère un monopole qui produit un bien dont il peut ajuster la qualité. Augmenter la qualité du bien est coûteux : le coût de production d'une quantité q du bien de qualité s est $C(q, s) = qs$.

Les consommateurs valorisent la qualité du bien : l'ensemble des consommateurs peut être représenté par un consommateur représentatif dont la fonction d'utilité s'écrit

$$U = q - \frac{q^2}{2s} + R - pq$$

où R est le revenu du consommateur, p est le prix du bien, q la quantité consommée, et s la qualité du bien produit par le monopole. On suppose $R \geq 1$ et $s \in [0, 1]$.

1. Déterminer la demande $D(p, s)$ du consommateur pour un bien de qualité s au prix p.
2. On considère la qualité s du bien fixée. Quel est le prix $p^M(s)$ fixé par le monopole ? Quel est son profit $\pi^M(s)$?
3. Quelle est la qualité s^M choisie par le monopole ? Quels sont le prix p^M, la quantité q^M et le profit π^M correspondants ?
4. Exprimer le surplus des consommateurs, le profit du monopole et le surplus social en fonction de q et de s. Montrer que si l'on fixe le niveau de qualité à s^M, on augmenterait le surplus social en augmentant la quantité vendue au-delà de q^M. Montrer aussi que si l'on fixe la quantité vendue à q^M, on augmenterait le surplus social en diminuant la quantité du bien en-deça de s^M. Commenter.
5. Déterminer la production q^* et la qualité s^* qui maximisent le surplus social. Commenter.

Exercice 2 : *Sélection des optima de Pareto.* 5 points

On considère une économie à deux biens X et Y, disponibles en quantités $\overline{X} = \overline{Y} = 1$, et deux consommateurs 1 et 2 dont les fonctions d'utilité respectives, notées $U_1(X_1, Y_1)$ et $U_2(X_2, Y_2)$, sont strictement croissantes en chacun de leurs arguments, différentiables, et concaves. On envisage deux critères de sélection entre les optima de Pareto.

1. Le critère égalitariste de Rawls consiste à sélectionner une allocation réalisable qui maximise l'utilité du consommateur le moins bien loti :

$$Max[Min[U_1(X_1, Y_1), U_2(X_2, Y_2)]].$$

Montrer que toute allocation solution est telle que l'utilité des deux agents est la même. En déduire que toute allocation solution est un optimum de Pareto.

2. Le critère utilitariste de Bentham consiste à attribuer un poids à chaque consommateur (ici, $\alpha \in [0,1]$ au consommateur 1, et $1-\alpha$ au consommateur 2) et à maximiser la moyenne pondérée des utilités :
$$Max \alpha U_1(X_1, Y_1) + (1-\alpha)U_2(X_2, Y_2).$$
Montrer que toute allocation qui maximise ce critère est un optimum de Pareto. Réciproquement, montrer qu'à tout optimum de Pareto on peut associer une pondération α telle qu'il maximise le critère de Bentham associé.

3. Application numérique : on suppose que les utilités sont les suivantes :
$$U_1(X_1, Y_1) = lnX_1 + lnY_1$$
$$U_2(X_2, Y_2) = lnX_2 + lnY_2.$$
   - Déterminer l'ensemble des optima de Pareto.
   - Déterminer l'optimum égalitariste de Rawls.
   - Déterminer pour chaque optimum la pondération utilitariste qui lui est associée par le critère de Bentham.

4. Commentez.

Exercice 3 : *Externalité sur le marché de l'acier.* 3 points

Considérons le cas du marché concurrentiel de l'acier (en équilibre partiel). La demande inverse d'acier est donnée par $p^d(q) = 20 - q$ et l'offre inverse d'acier est $p^s(q) = q = MC^{pr}(q)$, avec $MC^{pr}(q)$ le coût marginal privé de production d'acier. Le coût total de l'externalité est donné par $CE(q) = q^2$ (coût marginal de l'externalité $MCE(q) = 2q$).

1. Pourquoi la production d'acier génère-t-elle une externalité négative ?
2. Quel est l'équilibre concurrentiel de marché (q^e, p^e) ?
3. Quelle est la quantité d'acier produite à l'optimum de Pareto q^* ? Commenter.
4. Le gouvernement pense introduire une taxe unitaire t sur la production d'acier. Quel est le nom de cette taxe et quel niveau de la taxe permet de décentraliser l'optimum à l'équilibre de marché ? Commenter.

Exercice 4 : *Assurance et sélection adverse.* 7 points

On considère une économie avec deux types d'individus : des individus avec un risque élevé d'avoir un accident de santé et ceux qui ont un risque faible. Les individus avec un risque élevé ont une probabilité p_H d'avoir un accident et représentent une fraction γ_H de la population. Les individus avec un risque faible ont une probabilité p_L d'avoir un accident et représentent une fraction $\gamma_L = 1-\gamma_H$ de la population. Nous faisons l'hypothèse que $p_H > p_L$. Lorsque l'accident se réalise il génère pour l'individu une perte monétaire égale à $c > 0$. Les individus ont pour fonction d'utilité $u(.)$ avec $u'(.) > 0 > u''(.)$ et ils ont tous la même richesse initiale w.

1. Écrire l'utilité espérée des individus avec risque élevé et faible.

   Nous supposons que l'économie possède un grand nombre de compagnies d'assurance et que l'offre d'assurance est parfaitement concurrentielle. Une police d'assurance est un contrat (δ, π) où δ est la couverture (indemnité) si l'accident se réalise et π est la prime d'assurance.

2. Qu'implique l'hypothèse que l'offre d'assurance est parfaitement concurrentielle pour les profits des assureurs et pour la relation entre δ et π ?

3. Déterminer les contrats d'assurance optimaux lorsque les compagnies d'assurance observent parfaitement le type des individus (*information complète*). Représenter ces contrats dans un graphique avec pour axe des abscisses δ et axe des ordonnées π. Obtenons-nous dans ce cas un optimum de Pareto ? Commenter.
4. Montrer que les contrats obtenus en information complète ne peuvent pas être offerts par les assureurs lorsque les assureurs n'observent pas le type des individus (*information incomplète*).
5. En information incomplète, montrer graphiquement un exemple de contrats qui seraient possibles à l'équilibre (lorsqu'un équilibre existe). Quelles propriétés ont les contrats dans ce cas ? L'intervention du gouvernement est-elle souhaitable ?
6. Montrer graphiquement les conditions qui peuvent conduire à une non-existence du marché de l'assurance en information incomplète.

ECO 431 - Microéconomie
Marie-Laure Allain et Pierre Boyer
Examen, novembre 2018 - CORRIGE

Polycopié, transparents et notes personnelles du cours autorisés. Les calculatrices sont autorisées. L'épreuve comprend 4 exercices. Rédiger les réponses aux exercices 1-2 sur les copies roses et 3-4 sur les copies jaunes.

Exercice 1 : *Choix de qualité par un monopole.* 5 points

On considère un monopole qui produit un bien dont il peut ajuster la qualité. Augmenter la qualité du bien est coûteux : le coût de production d'une quantité q du bien de qualité s est $C(q, s) = qs$.

Les consommateurs valorisent la qualité du bien : l'ensemble des consommateurs peut être représenté par un consommateur représentatif dont la fonction d'utilité s'écrit

$$U = q - \frac{q^2}{2s} + R - pq$$

où R est le revenu du consommateur, p est le prix du bien, q la quantité consommée, et s la qualité du bien produit par le monopole. On suppose $R \geq 1$ et $s \in [0, 1]$.

1. Déterminer la demande $D(p, s)$ du consommateur pour un bien de qualité s au prix p.
   Le consommateur maximise son utilité :
   $$\underset{q}{M}axq - \frac{q^2}{2s} + R - pq$$
   $$stq \geq 0$$
   ce qui donne la demande suivante :
   $$D(p, s) = s(1 - p) \text{ si p<1}$$
   $$D(p, s) = 0 \text{ sinon}$$

2. On considère la qualité s du bien fixée. Quel est le prix $p^M(s)$ fixé par le monopole ? Quel est son profit $\pi^M(s)$?
   A s fixé, le monopole fixe son prix p afin de maximiser son profit $(p - s)D(p, s) = s(p - s)(1 - p)$. Le prix optimal est donc
   $$p^M(s) = \frac{1 + s}{2}.$$
   La quantité échangée est alors
   $$q^M(s) = \frac{s(1 - s)}{2}.$$
   et le profit du monopole
   $$\pi^M(s) = \frac{s(1 - s)^2}{4}.$$

3. Quelle est la qualité s^M choisie par le monopole ? Quels sont le prix p^M, la quantité q^M et le profit π^M correspondants ?
   Anticipant ce profit, le monopole choisit le niveau de qualité s qui maximise $\pi^M(s)$, c'est-à-dire $s^M = \frac{1}{3}$. Le prix d'équilibre est alors $p^M = \frac{2}{3}$, la quantité échangée est $q^M = \frac{1}{9}$ et le profit du monopole $\pi^M = \frac{1}{27}$.

4. Exprimer le surplus des consommateurs, le profit du monopole et le surplus social en fonction de q et de s. Montrer que si l'on fixe le niveau de qualité à s^M, on augmenterait le surplus social en augmentant la quantité vendue au-delà de q^M. Montrer aussi que si l'on fixe la quantité vendue à q^M, on augmenterait le surplus social en diminuant la quantité du bien en-deça de s^M. Commenter.

   A s donné, le surplus des consommateurs est

$$\begin{aligned} &\int_0^q (1 - \frac{x}{s})dx - q(1 - \frac{q}{s}) \\ &= \frac{q^2}{2s}. \end{aligned}$$

   Le profit du monopole est

$$\pi = (p - s)q = (1 - s)q - \frac{q^2}{s}.$$

   Le surplus social est donc

$$W = (1 - s)q - \frac{q^2}{2s}.$$

   Si l'on fixe la qualité $s = s^M = \frac{1}{3}$, on a

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \frac{2}{3} - 3q.$$

   donc en partant de $q^M = \frac{1}{9}$, on a $\frac{\partial W}{\partial q} = \frac{1}{3} > 0$: augmenter la quantité vendue améliorerait le surplus social. A qualité donnée, le monopole produit trop peu.
   Inversement, si l'on fixe la quantité $q = q^M = \frac{1}{9}$, on a

$$\frac{\partial W}{\partial s} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{162s^2}.$$

   donc en partant de $s^M = \frac{1}{3}$, on a $\frac{\partial W}{\partial s} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{18} < 0$: réduire la qualitité vendue améliorerait le surplus social. A quantité donnée, le monopole choisit une qualité trop élevée.

5. Déterminer la production q^* et la qualité s^* qui maximisent le surplus social. Commenter.
   On maximiser $W(s, q)$ en q et s. Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial q} &= 1 - s - \frac{q}{s} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial s} &= -q + \frac{q^2}{2s^2} = 0. \end{aligned}$$

   On en déduit que les niveaux qui maximisent le surplus social sont

$$\begin{aligned} q^* &= \frac{2}{9} \\ s^* &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   Source : Jullien et Picard, Exercices de Microéconomie, Montchrestien.

Exercice 2 : *Sélection des optima de Pareto.* 5 points

On considère une économie à deux biens X et Y, disponibles en quantités $\overline{X} = \overline{Y} = 1$, et deux consommateurs 1 et 2 dont les fonctions d'utilité respectives, notées $U_1(X_1, Y_1)$ et $U_2(X_2, Y_2)$, sont strictement croissantes en chacun de leurs arguments, différentiables, et concaves. On envisage deux critères de sélection entre les optima de Pareto.

1. Le critère égalitariste de Rawls consiste à sélectionner une allocation réalisable qui maximise l'utilité du consommateur le moins bien loti :

$$Max[Min[U_1(X_1, Y_1), U_2(X_2, Y_2)]].$$

Montrer que toute allocation solution est telle que l'utilité des deux agents est la même. En déduire que toute allocation solution est un optimum de Pareto.

Supposons qu'il existe une allocation $((X_1', Y_1'), (X_2', Y_2'))$ satisfaisant le critère de Rawls et telle que, par exemple, $U_1(X_1', Y_1') < U_2(X_2', Y_2')$. Par continuité et stricte croissance de U_1 et U_2, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $U_1(X_1', Y_1') < U_1(X_1' + \varepsilon, Y_1') < U_2(X_2' - \varepsilon, Y_2') < U_2(X_2', Y_2')$, ce qui contredit le fait que $((X_1', Y_1'), (X_2', Y_2'))$ maximise $[Min[U_1(X_1, Y_1), U_2(X_2, Y_2)]]$.

Considérons maintenant une allocation $((X_1, Y_1), (X_2, Y_2))$ qui satisfait le critère de Rawls. On sait donc que $U_1(X_1, Y_1) = U_2(X_2, Y_2)$. Par ailleurs, cette allocation répartit nécessairement tous les biens disponibles dans l'économie ($X_1 + X_2 = \overline{X}$ et $Y_1 + Y_2 = \overline{Y}$), sinon on pourrait augmenter l'utilité des deux agents (et donc le min des deux) en leur distribuant le reste de bien disponible. Supposons que cette allocation n'est pas un optimum de Pareto. Il existe donc une allocation réalisable $((X_1', Y_1'), (X_2', Y_2'))$ qui donne une utilité supérieure à tous les agents et strictement supérieure à l'un d'entre eux, par exemple :

$$U_1(X_1, Y_1) < U_1(X_1', Y_1')$$
$$U_2(X_2, Y_2) \leq U_2(X_2', Y_2')$$

— Si $U_2(X_2', Y_2') > U_2(X_2, Y_2)$, cela implique que l'allocation $((X_1, Y_1), (X_2, Y_2))$ ne satisfait pas le critère de Rawls, puisqu'on a une allocation réalisable qui améliore l'utilité des deux agents, donc du moins bien loti.

— Considérons maintenant le cas où $U_2(X_2', Y_2') = U_2(X_2, Y_2)$. Dans ce cas,

$$U_1(X_1', Y_1') > U_1(X_1, Y_1) = U_2(X_2, Y_2) = U_2(X_2', Y_2').$$

Par continuité de U_1 et U_2, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$U_1(X_1', Y_1') > U_1(X_1' - \varepsilon, Y_1') > U_2(X_2' + \varepsilon, Y_2') > U_2(X_2', Y_2') = U_2(X_2, Y_2),$$

ce qui contredit le fait que l'allocation $((X_1, Y_1), (X_2, Y_2))$ satisfait le critère de Rawls.

Donc l'allocation $((X_1, Y_1), (X_2, Y_2))$ est un optimum de Pareto.

2. Le critère utilitariste de Bentham consiste à attribuer un poids à chaque consommateur (ici, $\alpha \in [0, 1]$ au consommateur 1, et $1 - \alpha$ au consommateur 2) et à maximiser la moyenne pondérée des utilités :

$$Max \alpha U_1(X_1, Y_1) + (1 - \alpha) U_2(X_2, Y_2).$$

Montrer que toute allocation qui maximise ce critère est un optimum de Pareto. Réciproquement, montrer qu'à tout optimum de Pareto on peut associer une pondération α telle qu'il maximise le critère de Bentham associé.

Pour commencer, si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, l'allocation qui maximise le critère de Bentham est celle qui alloue tous les biens disponibles à l'un des deux agents, ce qui constitue toujours une optimum de Pareto. Réciproquement, un optimum de Pareto de bord (qui alloue tous les biens à l'un des deux agents) satisfait le critère de Bentham associé à la pondération 1 pour cet agent et 0 pour l'autre.

Supposons désormais que $\alpha \in]0,1[$. Soit une allocation réalisable $((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$ qui satisfait le critère de Bentham associé à la pondération α. Supposons que cette allocation n'est pas un optimum de Pareto. Il existe donc une allocation réalisable $((X_1',Y_1'),(X_2',Y_2'))$ telle que (par exemple si l'inégalité stricte s'applique à 1) :

$$U_1(X_1,Y_1) < U_1(X_1',Y_1')$$
$$U_2(X_2,Y_2) \leq U_2(X_2',Y_2').$$

Dans ce cas,

$$\alpha U_1(X_1',Y_1') + (1-\alpha)U_2(X_2',Y_2') > \alpha U_1(X_1,Y_1) + (1-\alpha)U_2(X_2,Y_2),$$

ce qui contredit le fait que l'allocation $((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$ maximise le critère de Bentham. Donc $((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$ est nécessairement un optimum de Pareto.

Réciproquement, soit un optimum de Pareto intérieur $((X_1^*,Y_1^*),(X_2^*,Y_2^*))$. La propriété de l'égalité des TMS implique que

$$\frac{\frac{\partial U_1}{\partial X_1}}{\frac{\partial U_1}{\partial Y_1}} = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial X_2}}{\frac{\partial U_2}{\partial Y_2}}$$

On définit alors

$$\beta = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial X_1}}{\frac{\partial U_2}{\partial X_2}} = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial Y_1}}{\frac{\partial U_2}{\partial Y_2}}$$

et on pose $\alpha = \frac{1}{1+\beta}$. On vérifie que l'allocation $((X_1^*,Y_1^*),(X_2^*,Y_2^*))$ maximise bien le critère de Bentham associé à la pondération α.

3. Application numérique : on suppose que les utilités sont les suivantes :

$$U_1(X_1,Y_1) = lnX_1 + lnY_1$$
$$U_2(X_2,Y_2) = lnX_2 + lnY_2.$$

— Déterminer l'ensemble des optima de Pareto. L'égalité des TMS détermine la solution :

$$X_1 = x$$
$$Y_1 = x$$
$$X_2 = 1-x$$
$$Y_2 = 1-x$$

pour $x \in [0,1]$.

— Déterminer l'optimum égalitariste de Rawls. La condition d'égalité des deux utilités s'écrit

$$2lnx = 2ln(1-x) \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

— Déterminer pour chaque optimum la pondération utilitariste qui lui est associée par le critère de Bentham. $\alpha = x$.

4. Commentez. Dans les deux cas, on compare les niveaux d'utilité des agents : il faut donc postuler que les utilités sont comparables, ce qui est une limite forte.

Exercice 3 : *Externalités de production.* 3 points

Considérons le cas du marché concurrentiel de l'acier (en équilibre partiel). La demande inverse d'acier est donnée par $p^d(q) = 20 - q$ et l'offre inverse d'acier est $p^s(q) = q = MC^{pr}(q)$, avec $MC^{pr}(q)$ le coût marginal privé de production d'acier. Le coût total de l'externalité est donné par $CE(q) = q^2$ (coût marginal de l'externalité $MCE(q) = 2q$).

1. Pourquoi la production d'acier génère une externalité négative ?

   La production d'acier génère une externalité négative car le coût marginal privé de production est different et inférieur au coût marginal social ($q = MC^{pr}(q) < MC^{so}(q) = MC^{pr}(q) + MCE(q) = q + 2q = 3q$).

2. Quel est l'équilibre concurrentiel de marché (q^e, p^e) ?

   L'équilibre de marché est tel que $demande = offre$: $20 - q = q$ d'où $q^e = 10$ et $p^e = 10$.

3. Quel est la quantité d'acier qui devrait être produite à l'optimum de Pareto q^* ? Commenter.

   L'optimum de Pareto est atteint lorsque le prix est égal à la somme du coût marginal de production et du coût marginal de l'externalité d'où :

   $$20 - q = MC^{so}(q) = MC^{pr}(q) + MCE(q) = 3q.$$

   Ainsi $q^* = 5 < q^e = 10$.

4. Le gouvernement pense introduire une taxe unitaire t sur la production d'acier. Quel est le nom de cette taxe et quel niveau de la taxe permet de décentraliser l'optimum à l'équilibre de marché ? Commenter.

   Le gouvernement introduit une taxe pigouvienne. Avec cette taxe unitaire t, l'équilibre de marché est tel que $p^d(q) = p^s(q) + t$ et donc $20 - q = q + t$. Nous avons $q^* = 5$ donc le gouvernement va fixer $t = MC^{so}(q^*) - MC^{pr}(q) = 15 - q$ et donc le nouvel équilibre de marché sera bien tel que : $q^* = q^e = 5$.

Exercice 4 : *Assurance et sélection adverse.* 7 points

On considère une économie avec deux types d'individus : des individus avec un risque élevé d'avoir un accident de santé et ceux qui ont un risque faible. Les individus avec un risque élevé ont une probabilité p_H d'avoir un accident et représentent une fraction γ_H de la population. Les individus avec un risque faible ont une probabilité p_L d'avoir un accident et représentent une fraction $\gamma_L = 1-\gamma_H$ de la population. Nous faisons l'hypothèse que $p_H > p_L$. Lorsque l'accident se réalise il génère pour l'individu une perte monétaire égale à $c > 0$. Les individus ont pour fonction d'utilité $u(.)$ avec $u'(.) > 0 > u''(.)$ et ils ont tous la même richesse initiale w.

1. Écrire l'utilité espérée des individus avec risque élevé et faible.

$$U_H = p_H u(w-c) + (1-p_H)u(w)$$

et

$$U_L = p_L u(w-c) + (1-p_L)u(w).$$

Nous supposons que l'économie possède un grand nombre de compagnies d'assurance et que l'offre d'assurance est parfaitement concurrentielle. Une police d'assurance est un contrat (δ, π) où δ est la couverture (indemnité) si l'accident se réalise et π est la prime d'assurance.

2. Qu'implique l'hypothèse que l'offre d'assurance est parfaitement concurrentielle pour les profits des assureurs et pour la relation entre δ et π ?

L'offre d'assurance est parfaitement concurrentielle donc profit nul pour les assureurs et prime d'assurance = prime actuarielle : $\Pi(\delta, \pi) = \pi - p\delta = 0$ implique $\pi = p\delta$ avec $p = p_H$ ou $p = p_L$ si séparation, et $p = \gamma_H p_H + \gamma_L p_L$ si pooling.

3. Déterminer les contrats d'assurance optimaux lorsque les compagnies d'assurance observent parfaitement le type des individus (*information complète*). Représenter ces contrats dans un graphique avec pour axe des abscisses δ et axe des ordonnées π. Obtenons-nous dans ce cas un optimum de Pareto ? Commenter.

À l'équilibre concurrentiel en information complète Les individus ont une couverture complète $\delta = c$ et payent le prime actuarielle correspondante : $S_h^* = (c, p_H c)$ et $S_l^* = (c, p_L c)$. Cet équilibre est Pareto-efficace. Graphiquement voir Figure 1.

4. Montrer que les contrats obtenus en information complète ne peuvent pas être offerts par les assureurs lorsque les assureurs n'observent pas le type des individus (*information incomplète*).

Les contraintes d'incitations sont

$$U_H(S_h) \geq U_H(S_l) \qquad (IC_H)$$

et

$$U_L(S_l) \geq U_L(S_h) \qquad (IC_L)$$

Il est facile de vérifier que les contrats S_h^* et S_l^* ne satisfont pas (IC_H) car les individus h préfèrent le contrat S_l^* : même quantité de couverture à un prix plus élevé.

5. En information incomplète, montrer graphiquement un exemple de contrats qui seraient possibles à l'équilibre (lorsqu'un équilibre existe). Quelles propriétés ont les contrats dans ce cas ? L'intervention du gouvernement est-elle souhaitable ?

Equilibre en information complète

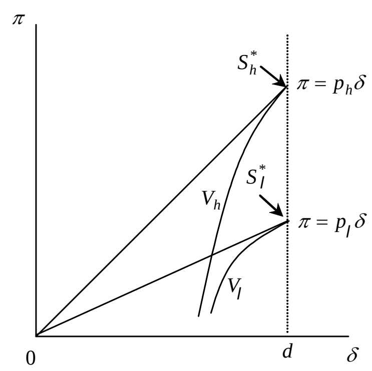

Figure 1 – Information complète

Si un équilibre existe, les contrats optimaux sont séparateurs et sont tels que : les individus H ont une assurance complète et payent la prime actuarielle correspondante alors que les individus L ne reçoivent qu'une couverture partielle et payent la prime actuarielle correspondante. Cet équilibre n'est Pareto-efficace : les types H n'ont pas assez d'assurance ($\delta < c$). Voir la Figure 2.

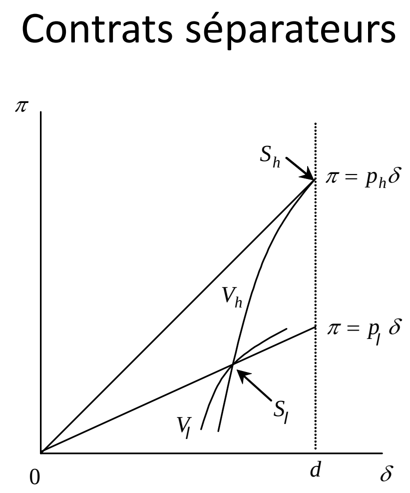

FIGURE 2 – Information incomplète

L'intervention du gouvernement est Pareto-améliorante : en imposant une subvention croisée et une couverture minimale au niveau moyen de risque. Les subvention de la prime des individus H sera telle que $t_H = \frac{t}{\gamma_H}$ et la taxe sur la prime des individus L : $t_L = \frac{t}{\gamma_L}$. Les primes sont donc $p_H\delta - t_H$ et $p_L\delta + t_L$. Graphiquement voir Figure 3 (attention à bien ajouter un niveau de couverture minimale sur le graphique).

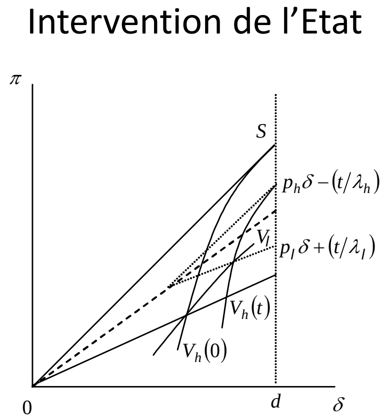

FIGURE 3 – Intervention du gouvernement

6. Montrer graphiquement les conditions qui peuvent conduire à une non-existence du marché de l'assurance en information incomplète.

   Nous procédons en deux étapes : (1) Un équilibre de pooling (ou mélangeant) peut être optimal si la fraction des types L est large : voir Figure 4.

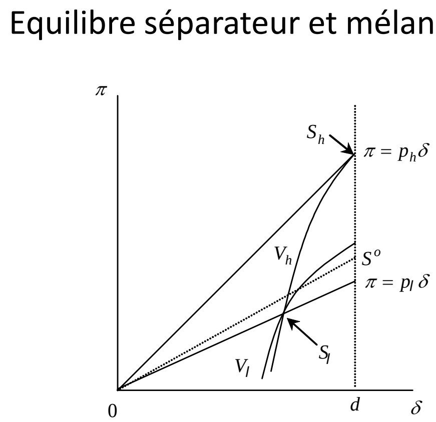

FIGURE 4 – Information incomplète : pooling

(2) Un équilibre de pooling ne peut pas exister : il est toujours optimal pour une firme d'introduire un contrat qui attire que les individus avec type L : voir Figure 5.

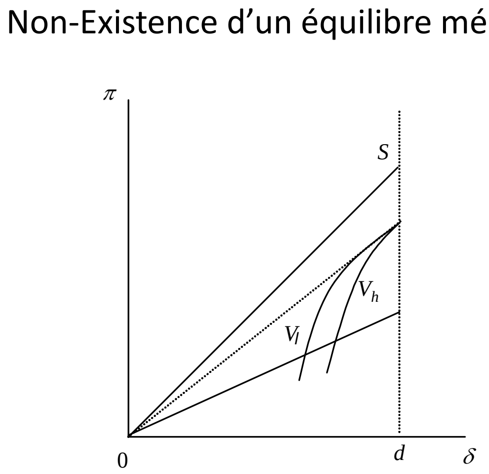

FIGURE 5 – Information incomplète : non-existence

ECO 431 - Microéconomie

Contrôle classant
Sujet proposé par Marie-Laure Allain et Pierre Boyer
Mardi 25 octobre 2017 Durée : 3 heures

Polycopié, transparents et notes personnelles du cours autorisés. Les calculatrices sont autorisées. L'épreuve comprend cinq exercices.

Rédiger les réponses aux exercices 1-2 et 3-4-5 sur des copies distinctes.

Exercice 1 : *Fonction de demande - 3 points*

Soit une économie à deux biens. Un consommateur a la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^{\frac{1}{4}}(x_2 - 7)^{\frac{3}{4}}$$

Il dispose d'un revenu R. Les biens sont disponibles aux prix p_1 et p_2.

1. Ecrire la contrainte budgétaire du consommateur.
2. Déterminer la fonction de demande du consommateur en les deux biens.
3. Le bien 1 est-il un bien normal ou inférieur ? Idem pour le bien 2. Justifier votre réponse.
4. Calculer l'élasticité prix directe de la demande en chacun des deux biens.
5. Calculer l'élasticité prix croisée de la demande en chacun des deux biens.

Exercice 2 : *Discrimination et différenciation horizontale - 8 points*

On considère le marché d'un bien produit et vendu par deux entreprises localisées chacune à l'extrémité d'un segment de longueur 1 : l'entreprise 1 est localisée à l'extrémité gauche (en 0) et l'entreprise 2 est localisée à l'extrémité droite (en 1). Chacune produit le bien avec un coût marginal constant c. Les deux entreprises sont en concurrence imparfaite, elles se font concurrence en prix à la Hotelling : les deux entreprises fixent leurs prix simultanément.

Les consommateurs sont distribués continûment et uniformément le long du segment. La masse totale des consommateurs est normalisée à 1. Chaque consommateur veut acheter au plus une unité de bien. Il fait face à un coût de transport t par unité de distance parcourue. L'utilité d'un consommateur qui achète une unité du bien auprès de l'entreprise située à la distance t de sa localisation est $U(x, p) = v - p - tx$; l'utilité d'un consommateur qui n'achète pas est normalisée à 0. On suppose que le marché est couvert, c'est-à-dire que v est suffisamment grand pour qu'à l'équilibre, tous les consommateurs achètent. On supposera également qu'en cas d'indifférence (lorsque le coût total de l'achat chez 1 est identique au coût total de l'achat chez 2) le consommateur achète à l'entreprise la plus proche.

Prix uniforme

On suppose pour commencer que la discrimination par les prix est interdite : chaque entreprise doit fixer un prix unique pour tous les consommateurs. On note p_1 le prix fixé par l'entreprise 1 et p_2 le prix fixé par l'entreprise 2.

1. Ecrire la demande qui s'adresse à chacune des entreprises, en fonction de p_1 et p_2.
2. On considère le prix p_2 comme fixé. Quelle est le prix de meilleure réponse de l'entreprise 1 ? Inversement, quelle est la meilleure réponse de l'entreprise 2 face au prix p_1 ?
3. Quels sont les prix d'équilibre de Nash du jeu simultané de concurrence en prix ?
4. On considère le consommateur localisé à distance x de l'entreprise 1. A quelle entreprise achète-t-il le bien, et quel est le coût total de l'achat pour ce consommateur (prix + coût de transport) ?

Discrimination au premier degré

On suppose maintenant que la discrimination par les prix au premier degré est permise : chaque entreprise peut fixer un prix personnalisé pour chaque consommateur.

1. On considère le consommateur localisé à distance $x \leq \frac{1}{2}$ de l'entreprise 1. Quel est le "meilleur prix" (le prix le plus faible) que l'entreprise 2 peut lui proposer ? On note $p_2^B(x)$ ce prix.
2. Quel est le coût total de l'achat pour ce consommateur (prix + coût de transport) s'il achète chez 2 ?
3. Si l'entreprise 2 offre au consommateur situé en x le prix $p_2^B(x)$, quelle est la meilleure réponse de l'entreprise 1 ?
4. Décrire l'équilibre du jeu : quels sont les prix proposés par chaque entreprise au consommateur localisé en x ? Auprès de quelle enteprise achète-t-il le bien ? Quel est le coût total de l'achat pour ce consommateur (prix + coût de transport) ?

Comparaison

Commentez l'effet de la discrimination sur le prix d'équilibre en fonction de la localisation des consommateurs, sur le surplus des consommateurs, et sur le profit des entreprises. Faire une figure avec en abscisse la localisation du consommateur x et en ordonnée le prix avec et sans discrimination.

Exercice 3 : *La tragédie des biens communs - 2 points*

On considère un lac sur lequel la pêche n'est pas règlementée. Le coût pour les pêcheurs d'envoyer un bateau est $r > 0$. Lorsque b bateaux sont envoyées sur le lac, $p(b) = \sqrt{b}$ poissons sont attrapés au total. Chaque poisson peut ensuite être revendu à un prix 1, indépendant de la quantité pêchée.

1. Quel est le nombre de bateaux envoyés à l'équilibre concurrentiel ?
2. Quel est le nombre optimal au sens de Pareto de bateaux qui devraient être envoyés ? Comparer au nombre de la question 1. Commenter.
3. Quelle taxe permettrait de restaurer l'optimalité ?

Exercice 4 : *La provision de bien public – 4 points*

Considérons une économie avec deux ménages, $i = A, B$, avec pour fonction d'utilité :

$$U_A(x_A, G) = \frac{1}{3}\ln(x_A) + \frac{2}{3}\ln(G),$$

$$U_B(x_B, G) = \frac{1}{2}\ln(x_B) + \frac{1}{2}\ln(G),$$

où $x_i \geq 0$ est la consommation de bien privé (le numéraire) et $G \geq 0$ la consommation de bien public. Le coût marginal de production du bien public est 1 et les dotations en numéraire sont $\omega_A = \omega_B = 20$.

1. Caractériser la quantité optimale au sens de Pareto de bien public. Cette quantité est-elle unique ?
2. Nous supposons maintenant que les ménages choisissent leur contribution de bien public de manière non-coopérative. Soit $g_i \geq 0$ $(i = A, B)$ la contribution du ménage i, avec $G = g_A + g_B$. Quel est l'équilibre de Nash de ce jeu de contribution volontaire ? La quantité offerte à cet équlibre est-elle optimale au sens de Pareto ?
3. Supposons que le gouvernement décide de produire G^P unités de bien public qui sont financées par une taxe lump-sum $\frac{G^P}{2}$ sur chaque ménage. Quelle va être la quantité totale de bien public après intervention du gouvernement à l'équilibre de Nash ? Commenter votre résultat.

Exercice 5 : *Le marché des voitures d'occasion avec possibilité de garantie - 3 points*

On considère un marché de voitures d'occasion avec 90 vendeurs, dont 2/3 ont des voitures de mauvaise qualité et 1/3 de bonne qualité. Il y a 100 acheteurs potentiels sur le marché.

Une voiture de bonne qualité n'a pas de problème technique avec probabilité 3/4. En revanche, il y a une probabilité 1/4 qu'elle tombe en panne. Pour les voitures de mauvaise qualité, les probabilités sont inversées : 1/4 de probabilité qu'elle ne tombe pas en panne et 3/4 qu'elle tombe en panne.

Si la voiture ne tombe pas en panne cela procure à un acheteur une utilité de 3. Si elle tombe en panne, l'utilité de l'acheteur est 0. Pour les vendeurs, l'utilité est égale à 2 si la voiture ne tombe pas en panne, et 0 sinon.

Les acheteurs et les vendeurs sont neutres au risque.

Les vendeurs savent si leur voiture est de bonne ou mauvaise qualité alors que cela n'est pas observable par l'acheteur.

1. Montrer que l'équilibre du marché est tel que les bonnes voitures ne sont pas vendues. Commenter.
2. À présent on suppose que les vendeurs peuvent offrir une garantie aux acheteurs, du type "si la voiture tombe en panne, nous vous remboursons une somme G". Montrer qu'il existe un équilibre où les vendeurs de bonne qualité se signalent en offrant une garantie G, et où les vendeurs de mauvaise qualité n'offrent pas de garantie (donnez une condition sur G pour que ce soit le cas).

ECO 431 - Microéconomie
Marie-Laure Allain et Pierre Boyer
Examen, novembre 2017 - CORRIGE

Exercice 1 : *Fonction de demande*

Soit une économie à deux biens. Un consommateur a la fonction d'utilité suivante :

$$U(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^{\frac{1}{4}}(x_2 - 7)^{\frac{3}{4}}$$

Il dispose d'un revenu R. Les biens sont disponibles aux prix p_1 et p_2.

1. Ecrire la contrainte budgétaire du consommateur.

$$p_1x_1 + p_2x_2 = R.$$

2. Déterminer la fonction de demande du consommateur en les deux biens.
   On utilise la propriét/'e selon laquelle le TMS est égal au rapport des prix :

$$\begin{aligned} TMS_{12} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} &= \frac{p_1}{p_2} \\ s.t. p_1x_1 + p_2x_2 &= R \\ \Leftrightarrow \frac{x_2 - 7}{3(x_1 - 3)} &= \frac{p_1}{p_2} \\ \Rightarrow p_2x_2 &= 3p_1x_1 + 7p_2 - 9p_1 \end{aligned}$$

   En combinant avec la contrainte budgétaire, on obtient :

$$\begin{aligned} x_1^D &= \frac{R + 9p_1 - 7p_2}{4p_1} \\ x_2^D &= \frac{3R - 9p_1 + 7p_2}{4p_2} \end{aligned}$$

3. Le bien 1 est-il un bien normal ou inférieur ? Idem pour le bien 2. Justifier votre réponse.
   La demande en bien 1 est croissante en R donc le bien 1 est normal. De même pour le bien 2, x_2^D est croissante en R donc le bien 2 est normal.
4. Calculer l'élasticité prix directe de la demande en chacun des deux biens.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{-R + 7p_2}{R + 9p_1 - 7p_2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{-3R + 9p_1}{3R - 9p_1 + 7p_2} \end{aligned}$$

5. Calculer l'élasticité prix croisée de la demande en chacun des deux biens.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \frac{-7p_2}{R + 9p_1 - 7p_2} \\ \varepsilon_{21} &= \frac{-9p_1}{3R - 9p_1 + 7p_2} \end{aligned}$$

Exercice 2 : *discrimination et différenciation horizontale*

On considère le marché d'un bien produit et vendu par deux entreprises localisées chacune à l'extrémité d'un segment de longueur 1 : l'entreprise 1 est localisée à l'extrémité gauche (en 0) et l'entreprise 2 est localisée à l'extrémité droite (en 1). Chacune produit le bien avec un coût marginal constant c. Les deux entreprises sont en concurrence imparfaite, elles se font concurrence en prix à la Hotelling : les deux entreprises fixent leurs prix simultanément.

Les consommateurs sont distribués continûment et uniformément le long du segment. La masse totale des consommateurs est normalisée à 1. Chaque consommateur veut acheter au plus une unité de bien. Il fait face à un coût de transport t par unité de distance parcourue. L'utilité d'un consommateur qui achète une unité du bien auprès de l'entreprise située à la distance t de sa localisation est $U(x,p) = v - p - tx$; l'utilité d'un consommateur qui n'achète pas est normalisée à 0. On suppose que le marché est couvert, c'est-à-dire que v est suffisamment grand pour qu'à l'équilibre, tous les consommateurs achètent. On supposera également qu'en cas d'indifférence (lorsque le coût total de l'achat chez 1 est identique au coût total de l'achat chez 2) le consommateur achète à l'entreprise la plus proche.

Prix uniforme

On suppose pour commencer que la discrimination par les prix est interdite : chaque entreprise doit fixer un prix unique pour tous les consommateurs. On note p_1 le prix fixé par l'entreprise 1 et p_2 le prix fixé par l'entreprise 2.

1. Ecrire la demande qui s'adresse à chacune des entreprises, en fonction de p_1 et p_2.
   Le consommateur situé en x préfère acheter le bien chez 1 plutot que chez 2 ssi $p_1 + tx \leq p_2 + t(1-x)$. On a donc :

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t} \\ D_2 &= 1 - D_1 \end{aligned}$$

2. On considère le prix p_2 comme fixé. Quelle est le prix de meilleure réponse de l'entreprise 1 ? Inversement, quelle est la meilleure réponse de l'entreprise 2 face au prix p_1 ?
   A p_2 fixé, l'entreprise 1 maximise son profit en fixant le prix de meilleure réponse $p_1^{BR}(p_2)$:

$$\begin{aligned} \underset{p_1}{Max}\pi_1 &= (p_1 - c)\left(\frac{1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t}\right) \\ &\Rightarrow \ p_1^{BR}(p_2) = \frac{c + t + p_2}{2} \end{aligned}$$

3. Quels sont les prix d'équilibre de Nash du jeu simultané de concurrence en prix ?
   L'intersection des deux fonctions de meilleure réponse détermine l'équilibre de Nash :

$$p_1^* = p_2^* = c + t$$

4. On considère le consommateur localisé à distance x de l'entreprise 1. A quelle entreprise achète-t-il le bien, et quel est le coût total de l'achat pour ce consommateur (prix + coût de transport) ?
   Le consommateur achète à l'entreprise la plus proche (1 si $x \leq \frac{1}{2}$, sinon 2) pour un coût total :

$$t + c + t.min\{x, 1 - x\}.$$

Discrimination au premier degré On suppose maintenant que la discrimination par les prix au premier degré est permise : chaque entreprise peut fixer un prix personnalisé pour chaque consommateur.

1. On considère le consommateur localisé à distance $x \leq \frac{1}{2}$ de l'entreprise 1. Quel est le "meilleur prix" (le prix le plus faible) que l'entreprise 2 peut lui proposer ? On note $p_2^B(x)$ ce prix.

   Le plus bas prix que peut proposer l'entreprise 2 sans faire de pertes est $p_2^B(x) = c$.

2. Quel est le coût total de l'achat pour ce consommateur (prix + coût de transport) s'il achète chez 2 ?

   Dans ce cas l'acheteur paie un coût total $c + t(1 - x)$.

3. Si l'entreprise 2 offre au consommateur situé en x le prix $p_2^B(x)$, quelle est la meilleure réponse de l'entreprise 1 ?

   1 peut offrir un prix tel que le consommateur est indifférent entre acheter chez lui et acheter chez 2 :

$$p_1 + tx = c + t(1 - x) \Rightarrow p_1 = c + t - 2tx$$

4. Décrire l'équilibre du jeu : quels sont les prix proposés par chaque entreprise au consommateur localisé en x ? Auprès de quelle enteprise achète-t-il le bien ? Quel est le coût total de l'achat pour ce consommateur (prix + coût de transport) ?

   Le ejue est en fait un jeu de concurrence à la Bertrand pour chaque consommateur x, avec des coûts différents entre les deux entreprises. Pour $x \leq \frac{1}{2}$:

$$p_1 = c + t - 2tx$$
$$p_2 = c$$

   le consommateur achète chez 1.Pour $x \geq \frac{1}{2}$:

$$p_1 = c$$
$$p_2 = c + t - 2t(1 - x)$$

   le consommateur achète chez 2.

Comparaison

Commentez l'effet de la discrimination sur le prix d'équilibre en fonction de la localisation des consommateurs, sur le surplus des consommateurs, et sur le profit des entreprises. Faire une figure avec en abscisse la localisation du consommateur x et en ordonnée le prix avec et sans discrimination.

La discrimination entraine une baisse des prix sur tout le segment, la plus forte baisse concernant les consommateurs localisés en milieu de segment, pour lesquels la concurrence entre les deux entreprises dans le régime de discrimination est la plus forte (coûts symétriques).

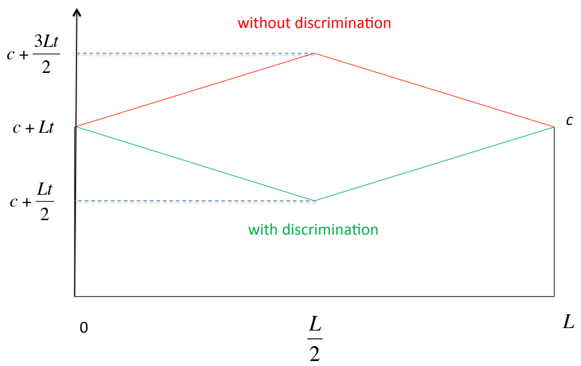

FIGURE 6 – Discrimination et concurrence

Exercice 3 : *La tragédie des biens communs* 2 points

On considère un lac sur lequel la pêche n'est pas règlementée. Le coût pour les pêcheurs d'envoyer un bateau est $r > 0$. Lorsque b bateaux sont envoyées sur le lac, $p(b) = \sqrt{b}$ poissons sont attrapés au total. Chaque poisson peut ensuite être revendu à un prix 1, indépendant de la quantité pêchée.

1. Quel est le nombre de bateaux envoyés à l'équilibre concurrentiel ?

   À l'équilibre de libre-entrée, les pêcheurs décident d'envoyer un bateau tant que cela leur apporte un gain net non nul, c'est-à-dire tant que
   $$\Pi(b) = p(b) - rb \geq 0.$$
   Le profit sera nul à l'équilibre de libre-entrée, et le nombre de bateaux b^e vérifiera :
   $$\frac{p(b^e)}{b^e} = r$$
   d'où $b^e = \frac{1}{r^2}$.

2. Quel est le nombre optimal au sens de Pareto de bateaux qui devraient être envoyés ? Comparer au nombre de la question 1. Commenter.

   Si un seul individu détient l'ensemble des bateaux, son objectif va être de maximiser le profit $\Pi(b) = p(b) - rb$ ce qui va nous donner l'optimum de Pareto. On va atteindre ici le nombre optimal de bateaux puisque l'individu internalise dans son programme l'externalité générée par l'envoi d'un bateau supplémentaire sur le lac. L'optimalité de Pareto est donc :
   $$p'(b^*) = r$$
   d'où $b^* = \frac{1}{4r^2}$ par conséquent, $b^* < b^e$: il y a trop de bateaux à l'équilibre de libre-entrée. Sans "régulation", les pêcheurs ne tiennent pas compte du fait que lorsqu'ils entrent sur le lac, ils font baisser le revenu des pêcheurs déjà présents (la fraction de poissons pêchés qui leur revient diminue). La présence d'un nouvel utilisateur crée une externalité négative pour les autres. Cette externalité est internalisée quand on considère le surplus total, mais pas lorsque chaque individu se focalise sur sa propre utilité.

3. Quelle taxe permettrait de restaurer l'optimalité.

   On décide d'instaurer une taxe t unitaire destinée à atteindre le nombre optimal de bateaux, à l'équilibre de libre-entrée. Le coût d'envoi d'un bateau n'est donc plus r mais $r+t$. On veut que la taxe t soit telle qu'en laissant toujours les individus raisonner de façon individuelle, le nombre de bateaux envoyé à l'équilibre correspond au nombre optimal de bateaux, c'est-à-dire :

$$p(b^*) = (r + t^*)b^*$$

   soit

$$t^* = \frac{p(b^*)}{b^*} - r$$

   d'où $t^* = r$.

Exercice 4 : *La provision de bien public* 4 points

Considérons une économie avec deux ménages, $i = A, B$, avec pour fonction d'utilité :

$$U_A(x_A, G) = \frac{1}{3}\ln(x_A) + \frac{2}{3}\ln(G),$$

$$U_B(x_B, G) = \frac{1}{2}\ln(x_B) + \frac{1}{2}\ln(G),$$

où $x_i \geq 0$ est la consommation de bien privé (le numéraire) et $G \geq 0$ la consommation de bien public. Le coût marginal de production du bien public 1 et les dotations en numéraire sont $\omega_A = \omega_B = 20$.

1. Caractériser la quantité optimale au sens de Pareto de bien public. Cette quantité est-elle unique ?

   Règle de Samuelson : la quantité optimale de bien public est telle que la somme des dispositions marginales à payer pour le bien public G est égale au coût marginal de production du bien public d'où

   $$\frac{2x_A}{G} + \frac{x_B}{G} = \frac{2x_A + x_B}{G} = 1.$$

   La contrainte budgétaire de l'économie est $x_A + x_B + G = 40$. Ici nous n'avons pas une quantité unique de bien public pour toutes les allocations optimales au sens de Pareto.

2. Nous supposons maintenant que les ménages choisissent leur contribution de bien public de manière non-coopérative. Soit $g_i \geq 0$ $(i = A, B)$ la contribution du ménage i, avec $G = g_A + g_B$. Quel est l'équilibre de Nash de ce jeu de contribution volontaire. La quantité offerte à cet équlibre est-elle optimale au sens de Pareto ? Les fonctions de réaction des ménages sont

   $$\psi_A(g_B) = max\{0, \frac{40}{3} - \frac{g_B}{3}\}$$

   $$\psi_B(g_A) = max\{0, 10 - \frac{g_A}{2}\}$$

   d'où l'équilibre de Nash : $g_A^N = 12$ (donc $x_A^N = 20 - 12 = 8$), $g_B^N = 4$ (donc $x_B^N = 20 - 4 = 16$) et $G^N = g_A^N + g_B^N = 16$. L'équilibre de Nash n'est pas optimal au sens de Pareto car il ne vérifie pas la règle de Samuelson : $2x_A + x_B = G$ à l'optimum de Pareto alors qu'ici $2x_A^N + x_B^N \neq G^N$.

3. Supposons que le gouvernement décide de produire G^P unités de bien public qui sont financées par une taxe lump-sum $\frac{G^P}{2}$ sur chaque ménage. Quel va être la quantité totale de bien public après intervention du gouvernement à l'équilibre de Nash ? Commenter votre résultat. Les fonctions de réaction des ménages sont maintenant

   $$\psi_A(g_B, G^P) = max\{0, \frac{40}{3} - \frac{g_B}{3} - \frac{2G^P}{3}\}$$

   $$\psi_B(g_A, G^P) = max\{0, 10 - \frac{g_A}{2} - \frac{3G^P}{4}\}$$

   d'où l'équilibre de Nash : $\hat{g}_A^N = 12 - \frac{4}{5}G^P$, $\hat{g}_B^N = 4 - \frac{1}{5}G^P$ et $\hat{G}^N = G^P + \hat{g}_A^N + \hat{g}_B^N = 16$. Nous obtenons un effet total d'éviction : baisse de la fourniture privé qui est provoquée par une hausse de la provision publique.

Exercice 5 : *Le marché des voitures d'occasion avec possibilité de garantie* 3 points

On considère un marché de voiture d'occasions avec 90 vendeurs, dont 2/3 ont des voitures de mauvaises qualités et 1/3 de bonnes qualités. Il y a 100 acheteurs potentiels sur le marché.

Une voiture de bonne qualité n'a pas de problème technique avec probabilité 3/4. En revanche, il y a une probabilité 1/4 qu'elle tombe en panne. Pour les voitures de mauvaise qualité, les probabilités sont inversées : 1/4 de probabilité qu'elle ne tombe pas en panne et 3/4 qu'elle tombe en panne.

Si la voiture ne tombe pas en panne cela procure à un acheteur une utilité de 3. Si elle tombe en panne, l'utilité de l'acheteur est 0. Pour les vendeurs, l'utilité est égale à 2 si la voiture ne tombe pas en panne, et 0 sinon.

Les acheteurs et les vendeurs sont neutres au risque.

Les vendeurs savent si leur voiture est de bonne ou mauvaise qualité alors que cela n'est pas observable par l'acheteur.

1. Montrer que l'équilibre du marché est tel que les bonnes voitures ne sont pas vendues. Commenter.

   Nous avons l'offre de voitures :

$$S(p) = \begin{cases} 90 & \text{si } p > \frac{3}{2}, \\ [60, 90] & \text{si } p = \frac{3}{2}, \\ 60 & \text{si } \frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}, \\ [0, 60] & \text{si } p = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

   Si la probabilité d'obtenir un véhicule de bonne qualité est égale à q, l'espérance de gain d'un acheteur est donc

$$3q\frac{3}{4} + 3(1-q)\frac{1}{4} = \frac{3}{4}(2q+1)$$

   et elle doit être comparé au prix p. D'où

$$D(p,q) = \begin{cases} 100 & \text{si } \frac{3}{4}(2q+1) > p, \\ [0, 100] & \text{si } \frac{3}{4}(2q+1) = p, \\ 0 & \text{si } \frac{3}{4}(2q+1) < p. \end{cases}$$

   Pour tout prix p si les véhicules de bonne qualité sont offerts sur le marché, ceux de mauvaise qualité le sont aussi. Cela nous permet d'exprimer q comme une fonction de y :

$$q(y) = \begin{cases} \frac{y-60}{y} & \text{si } 60 \leq y \leq 90, \\ 0 & \text{si } 0 < y \leq 60. \end{cases}$$

   Définition de l'équilibre de marché : Un équilibre concurrentiel du marché à la Akerlof est défini par des niveaux de prix $p^* > 0$ et de quantités $y^* > 0$ ainsi que par des anticipations (ou des croyances) $q^* \in [0, 1]$ tels que :

$$y^* \in D(p^*, q^*),$$
$$y^* \in S(p^*),$$
$$q^* = q(y^*).$$

   À tout équilibre on a $0 < y \leq 90$ et donc $D(p, q(y)) \in]0, 100]$, ce qui implique

$$p = \frac{3}{4}(2q(y) + 1)$$

et donc

$$p = \begin{cases} \frac{3}{4}[2\frac{y-60}{y}+1] & \text{si } 60 \leq y \leq 90, \\ \frac{3}{4} & \text{si } 0 < y \leq 60. \end{cases}$$

On obtient $p^* = \frac{3}{4}$, $y^* = 60$ et $q^* = 0$: à l'équilibre seuls les véhicules de mauvaise qualité sont offerts sur le marché.

2. À présent on suppose que les vendeurs peuvent offrir une garantie aux acheteurs, du type "si la voiture tombe en panne, nous vous remboursons une somme G". Montrer qu'il existe un équilibre où les vendeurs de bonne qualité se signalent en offrant une garantie G, et où les vendeurs de mauvaise qualité n'offrent pas de garantie (donnez une condition sur G pour que ce soit le cas).
On suppose qu'il existe un équilibre où les vendeurs de bonne qualité se signalent en offrant une garantie G, et on détermine les caractéristiques de cet équilibre. Avec G en cas de panne du point de vue de l'acheteur (il achète si l'espérance d'utilité est supérieure au prix, et est cette fois capable de distinguer les vendeurs car on a supposé que l'équilibre était séparateur) :

pour une bonne voiture (avec prix p_B)

$$\frac{3}{4}3 + \frac{1}{4}G \geq p_B$$

d'où $\frac{9+G}{4} \geq p_B$;

pour une mauvaise voiture (avec prix p_M)

$$\frac{1}{4}3 + \frac{3}{4}0 = \frac{3}{4} \geq p_M$$

Supposons que ces contraintes soient saturées d'où $p_M = \frac{3}{4}$ et $p_B = \frac{9+G}{4}$. Quelles sont les conditions pour que la situation précédente soit bien un équilibre séparateur, c'est-à-dire qu'aucun type de vendeur n'ait intérêt à en dévier ?

Point de vue du vendeur Bon (type B) : il propose une garantie (ne dévie pas) si son espérance de profit dans ce cas est supérieure à celle du cas où il ne proposerait pas de garantie (dévie), et se ferait donc passer pour un vendeur mauvais de type M auprès des clients

$$p_B - \frac{1}{4}G \geq p_M$$

ou, si $p_M = \frac{3}{4}$ et $p_B = \frac{9+G}{4}$,

$$\frac{9}{4} > \frac{3}{4}$$

ce qui est toujours vrai.

Point de vue du vendeur M : il ne propose pas de garantie (ne dévie pas) si son espérance de profit dans ce cas est supérieure à celle du cas où il proposerait une garantie (dévie), et se ferait donc passer pour un vendeur de type B auprès des clients :

$$p_M \geq p_B - \frac{3}{4}G$$

ou, si $p_M = \frac{3}{4}$ et $p_B = \frac{9+G}{4}$,

$$\frac{3}{4} \geq \frac{9+G}{4} - \frac{3}{4}G = \frac{9-2G}{4}$$

ou

$$G \geq 3.$$

Si $G \geq 3$ nous avons bien ici un équilibre séparateur où les vendeurs de bonne qualité se signalent en offrant une garantie G, et où les vendeurs de mauvaise qualité n'offrent pas de garantie. Notons que les contraintes de participation sont également vérifiées.