5.5.2 Démonstrations de la partie faisabilité politique et taxe carbone

Preuve 5.1 (Lemme 1) $p_1/p_2 < \alpha$:

Le consommateur utilise c_1 ($c_2 = 0$) et maximise

$$c_0 + \theta v(\alpha c_1) \quad s.c. \quad I = c_0 + p_1 c_1$$

Les Conditions du Premier Ordre (CPO) sont

$$c_1^{LF} = \frac{1}{\alpha} v'^{-1}(\frac{p_1}{\alpha\theta})$$

$$c_0^{LF} = I - \frac{p_1}{\alpha} v'^{-1}(\frac{p_1}{\alpha\theta})$$

$p_1/p_2 > \alpha$:

Le consommateur utilise c_2 ($c_1 = 0$) et maximise

$$c_0 + \theta v(c_2) \quad s.c. \quad I = c_0 + p_2 c_2$$

CPO :

$$c_2^{LF} = v'^{-1}(\frac{p_2}{\theta})$$

$$c_0^{LF} = I - p_2 v'^{-1}(\frac{p_2}{\theta})$$

c_1^{LF} est croissant en θ (car v'^{-1} is décroissant).
c_0^{LF} is décroissant en θ (car $c_0^{LF} = I - p_1 c_1^{LF}$)

Avec l'utilité CRRA

$p_1/p_2 < \alpha$:

$$c_1^{LF} = (\frac{p_1}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}} \alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \quad , \quad c_0^{LF} = I - (\frac{1}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}} (\frac{p_1}{\alpha})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

$p_1/p_2 > \alpha$:

$$c_2^{LF} = (\frac{p_2}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}} \quad , \quad c_0^{LF} = I - (\frac{1}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}} p_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

Preuve 5.2 (Lemme 2) $(p_1 + t)/p_2 < \alpha$:

Alors le consommateur utilise c_1 ($c_2 = 0$) et maximise

$$c_0 + \theta v(\alpha c_1) \quad s.c. \quad I + T = c_0 + (p_1 + t) c_1$$

CPO :

$$c_1^* = \frac{1}{\alpha} v'^{-1}(\frac{p_1 + t}{\alpha\theta})$$

$$c_0^* = I + T - \frac{p_1+t}{\alpha} v'^{-1}(\frac{p_1+t}{\alpha\theta})$$

$$T = \int_{\frac{p_1+t}{p_2}}^{\overline{\alpha}} \frac{t}{\alpha} v'^{-1}(\frac{p_1+t}{\alpha\theta}) f(\alpha) d\alpha$$

$(p_1+t)/p_2 > \alpha$ *:*

Le consommateur utilise c_2 ($c_1 = 0$) et maximise

$$c_0 + \theta v(c_2) \quad s.c. \quad I + T = c_0 + p_2 c_2$$

CPO :

$$c_2^* = v'^{-1}(\frac{p_2}{\theta})$$

$$c_0^* = I + T - p_2 v'^{-1}(\frac{p_2}{\theta})$$

Avec l'utilité CRRA

$(p_1+t)/p_2 < \alpha$ *:*

$$c_1^* = (\frac{p_1+t}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}} \alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \quad , \; c_0^* = I + T - (\frac{1}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}} (\frac{p_1+t}{\alpha})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

$$T = \int_{\frac{p_1+t}{p_2}}^{\overline{\alpha}} t(\frac{p_1+t}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}} \alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} f(\alpha) d\alpha$$

$(p_1+t)/p_2 > \alpha$ *:*

$$c_2^* = (\frac{p_2}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}} \quad , \quad c_0^* = I + T - (\frac{1}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}} p_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

Preuve 5.3 (Lemme 3) *Puisque v est concave, v' est décroissante et donc v'^{-1} l'est aussi.*

$$\frac{p_1+t}{\alpha\theta} > \frac{p_1}{\alpha\theta} \Rightarrow v'^{1}(\frac{p_1+t}{\alpha\theta}) < v'^{1}(\frac{p_1}{\alpha\theta})$$

La consommation de bien carboné est réduite pour ceux qui ne passe pas au bien décarboné.

c_1 est décroissant en t.

α étant distribué selon $F(.)$ sur $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, le seuil α auquel un individu change pour le bien décarboné passe de p_1/p_2 à $(p_1+t)/p_2$, et donc

$$\mathbf{P}\Big(\frac{p_1+t}{p_2} > \alpha\Big) = F\Big(\frac{p_1+t}{p_2}\Big) > F\Big(\frac{p_1}{p_2}\Big) = \mathbf{P}\Big(\frac{p_1}{p_2} > \alpha\Big)$$

Celà pousse plus de gens à consommer décarboné.

Critère d'efficacité

Personne n'utilise c_2 si

$$\frac{p_1+t}{p_2} < \alpha \quad \forall \alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$$

Donc si

$$\frac{p_1+t}{p_2} < \underline{\alpha}$$

Par conséquent le taux t de la taxe devrait au moins vérifier $t > \underline{\alpha}p_2 - p_1$, sinon la taxe est inefficace.

Preuve 5.4 (Lemme 4) $\underline{c_2^{LF} \rightarrow c_2^*}$ *Les premiers sont 100% gagnants, ils ne modifient pas leur consommation, ne payent aucune taxe et reçoivent un transfert.*

Formellement on a

$$\Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) = c_0^* + \theta v(c_2^*) - c_0^{LF} - \theta v(c_2^{LF})$$

Or $c_2^* = c_2^{LF}$ (voir Lemme 1 and 2), donc $v(c_2^*) = v(c_2^{LF})$

$$\Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) = c_0^* - c_0^{LF} = I + T - p_2 c_2^* - I + p_2 c_2^{LF} = T > 0$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha}(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) = \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0$$

Puisque T est un transfert forfaitaire (il n'est pas corrélé avec le α d'un individu). Par conséquent, pour ceux qui utilisent déjà c_2, $\Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t)$ est constant avec α.

$\underline{c_1^{LF} \rightarrow c_2^*}$

$$\Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) = c_0^* + \theta v(c_2^*) - c_0^{LF} - \theta v(\alpha c_1^{LF}) = T + p_1 c_1^{LF} - p_2 c_2^* + \theta\big(v(c_2^*) - v(\alpha c_1^{LF})\big)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha} = \frac{\partial T}{\partial \alpha} + p_1 \frac{\partial c_1^{LF}}{\partial \alpha} - \theta \frac{\partial}{\partial \alpha}\big(v(\alpha c_1^{LF})\big)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha} = 0 + \underbrace{\big(p_1 - \alpha\theta v'(\alpha c_1^{LF})\big)}_{=0,\ d'après\ la\ CPO} \frac{\partial c_1^{LF}}{\partial \alpha} - \theta c_1^{LF} v'(\alpha c_1^{LF})$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha} = -\theta c_1^{LF} v'(\alpha c_1^{LF}) < 0$$

Ainsi ΔV est décroissant en α (pour le groupe $c_1^{LF} \rightarrow c_2^*$).

$\underline{c_1^{LF} \rightarrow c_1^*}$

$$\Delta V = c_0^* + \theta v(\alpha c_1^*) - c_0^{LF} - \theta v(\alpha c_1^{LF}) = T + \theta\big(v(\alpha c_1^*) - v(\alpha c_1^{LF})\big) + p_1(c_1^{LF} - c_1^*) - tc_1^*$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha} = \frac{\partial T}{\partial \alpha} + p_1 \frac{\partial c_1^{LF}}{\partial \alpha} - (p_1 + t)\frac{\partial c_1^*}{\partial \alpha} + \theta\Big[\frac{\partial}{\partial \alpha}\big(v(\alpha c_1^*) - v(\alpha c_1^{LF})\big)\Big]$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha} = \underbrace{\big(p_1 - \alpha\theta v'(\alpha c_1^{LF})\big)}_{=0,\ d'après\ la\ CPO}\frac{\partial c_1^{LF}}{\partial \alpha} - \underbrace{\big(\alpha\theta v'(\alpha c_1^*) - (p_1+t)\big)}_{=0,\ d'après\ la\ CPO}\frac{\partial c_1^*}{\partial \alpha} + \theta\big(c_1^* v'(\alpha c_1^*) - c_1^{LF} v'(\alpha c_1^{LF})\big)$$

$$= \theta\big(c_1^* v'(\alpha c_1^*) - c_1^{LF} v'(\alpha c_1^{LF})\big)$$

$$= \theta\Big(c_1^* v'\big(v'^{-1}(\frac{p_1+t}{\alpha\theta})\big) - c_1^{LF} v'\big(v'^{-1}(\frac{p_1}{\alpha\theta})\big)\Big)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha} = c_1^*(\frac{p_1+t}{\alpha}) - c_1^{LF}(\frac{p_1}{\alpha})$$

Avec l'utilité CRRA

Avec la fonction d'utilité CRRA, la dernière équation devient

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha} = (\frac{p_1+t}{\alpha})(\frac{p_1+t}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} - (\frac{p_1}{\alpha})(\frac{p_1}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}$$

$$= (\frac{1}{\theta})^{-\frac{1}{\sigma}}\big((p_1+t)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} - p_1^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\big)\alpha^{\frac{1-2\sigma}{\sigma}}$$

Si $\phi : x \mapsto x^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$ *est décroissante (i.e.* $\sigma < 1$*) alors* ΔV *est décroissant en* α.

Preuve 5.5 (Théorème 1) $\Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t)$ *est monotone par rapport à* α *: constant pour le groupe* $c_2^{LF} \to c_2^*$ *et décroissant pour les autres groupes. Ainsi, si*

$$\Delta V(p_1, p_2, \alpha^m, \theta, t) > 0$$

alors

$$\Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) > 0 \quad \forall \alpha < \alpha^m$$

En résulte une majorité favorable à l'introduction d'une taxe carbone.

Preuve 5.6 (Corollaire 1) *Supposons* $\frac{p_1}{p_2} > \alpha^m$*, then* $\frac{p_1}{p_2} > \alpha\ \forall \alpha < \alpha^m$*. Par conséquent, une majorité de consommateur est* $c_2^{LF} \to c_2^*$ *et soutient l'introduction d'une taxe carbone.*

Preuve 5.7 (Proposition 1) $\underline{c_1^{LF} \to c_2^*}$

$$\Delta V = T + p_1 c_1^{LF} - p_2 c_2^* + \theta\big(v(c_2^*) - v(\alpha c_1^{LF})\big)$$

$$= T + \big(\frac{1}{\theta}\big)^{-\frac{1}{\sigma}}\Big(p_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} - p_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big) + \theta\Big(\frac{\big(\frac{p_2}{\theta}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \big(\frac{p_1}{\alpha\theta}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{1-\sigma}\Big)$$

$$= T + \theta^{\frac{1}{\sigma}}\Big(\big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - p_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big)\big(1 - \frac{1}{1-\sigma}\big)$$

$$= T + \theta^{\frac{1}{\sigma}}\underbrace{\Big(\big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - p_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big)}_{>0}\underbrace{\big(-\frac{\sigma}{1-\sigma}\big)}_{<0}$$

$\Delta V > 0$ *ssi*

$$T > \theta^{\frac{1}{\sigma}}\Big(\big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - p_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big)\big(\frac{\sigma}{1-\sigma}\big)$$

$$\frac{T}{\theta^{\frac{1}{\sigma}}}\frac{1-\sigma}{\sigma} + p_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} > \big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

$$\alpha < \frac{p_1}{\Big(\frac{T}{\theta^{\frac{1}{\sigma}}}\frac{1-\sigma}{\sigma} + p_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}} = \tilde{\alpha}$$

$$\forall\alpha > \tilde{\alpha} \quad \Delta V < 0$$

Ceci n'est vrai que si $\tilde{\alpha} < (p_1 + t)/p_2$

$\underline{c_1^{LF} \rightarrow c_1^*}$

$$\Delta V = T + \theta\big(v(\alpha c_1^*) - v(\alpha c_1^{LF})\big) + p_1 c_1^{LF} - (p_1 + t)c_1^*$$

$$= T + \frac{1}{1-\sigma}\theta^{\frac{1}{\sigma}}\Big(\big(\frac{p_1+t}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big) + \theta^{\frac{1}{\sigma}}\Big(\big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \big(\frac{p_1+t}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big)$$

$$= T + \theta^{\frac{1}{\sigma}}\Big(\big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \big(\frac{p_1+t}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big)\big(1 - \frac{1}{1-\sigma}\big)$$

$$= T + \theta^{\frac{1}{\sigma}}\Big(\big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \big(\frac{p_1+t}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big)\big(-\frac{\sigma}{1-\sigma}\big)$$

$\Delta V > 0$ *ssi*

$$T > \theta^{\frac{1}{\sigma}}\Big(\big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \big(\frac{p_1+t}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big)\big(\frac{\sigma}{1-\sigma}\big)$$

$$\frac{T}{\theta^{\frac{1}{\sigma}}}\frac{1-\sigma}{\sigma} > \big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \big(\frac{p_1+t}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

$$\frac{T}{\theta^{\frac{1}{\sigma}}}\frac{1-\sigma}{\sigma} > \alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\big(p_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - (p_1+t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\big)$$

$$\alpha < \Big[\frac{T}{\theta^{\frac{1}{\sigma}}}\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{1}{p_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - (p_1+t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}\Big]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \tilde{\tilde{\alpha}}$$

$$\forall \alpha > \tilde{\tilde{\alpha}} \quad \Delta V < 0$$

Ceci n'est vrai que si $\tilde{\alpha} > (p_1+t)/p_2$

Preuve 5.8 (Lemme 5)

$$c_1^* = \frac{1}{\alpha} v'^{-1}\big(\frac{p_1+t}{\alpha\theta}\big)$$

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}\left[v'^{-1}\big(\frac{p_1+t}{\alpha\theta}\big) + \frac{p_1+t}{\alpha\theta}\frac{1}{v''\Big(v'^{-1}\big(\frac{p_1+t}{\alpha\theta}\big)\Big)}\right]$$

Le premier terme du [ ] est positif et le second négatif, car v *est concave,* $v'' < 0$.
Avec l'utilité CRRA

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial \alpha} = \big(\frac{p_1+t}{\theta}\big)^{-\frac{1}{\sigma}}\frac{1-\sigma}{\sigma}\alpha^{\frac{1-2\sigma}{\sigma}}$$

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial \alpha} > 0 \Leftrightarrow 1-\sigma > 0 \Leftrightarrow 1 > \sigma$$

Preuve 5.9 (Lemme 6)

$$V(p_1+t, p_2, \alpha, \theta) - k(C_1^*) - V(p_1, p_2, \alpha, \theta) + k(C_1^{LF})$$

$$= \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) + k(C_1^{LF}) - k(C_1^*)$$

$$= \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) + \Delta k$$

On a

$$C_1^* = \int_{\frac{p_1+t}{p_2}}^{\overline{\alpha}} \frac{1}{\alpha} v'^{-1}\big(\frac{p_1+t}{\alpha\theta}\big) f(\alpha) d\alpha \leq$$

$$\int_{\frac{p_1+t}{p_2}}^{\overline{\alpha}} \frac{1}{\alpha} v'^{-1}\big(\frac{p_1}{\alpha\theta}\big) f(\alpha) d\alpha$$

$$\leq \int_{\frac{p_1}{p_2}}^{\overline{\alpha}} \frac{1}{\alpha} v'^{-1}\big(\frac{p_1}{\alpha\theta}\big) f(\alpha) d\alpha = C_1^{LF}$$

Ainsi $C_1^* \leq C_1^{LF} \Leftrightarrow k(C_1^*) \leq k(C_1^{LF}) \Leftrightarrow 0 \leq k(C_1^{LF}) - k(C_1^*) = \Delta k$ *. L'externalité est réduite pour tout le monde.*

Preuve 5.10 (Proposition 2) *Pour la preuve, posons* $\Delta V'(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) := \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) + \Delta k$.

Pour un individu avec un α tel que $0 \geq \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) \geq -\Delta k$. Alors

$$\Delta V'(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) = \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) + \Delta k \geq \Delta k - \Delta k = 0$$

Tous les individus avec un tel α deviennent favorables à l'introduction d'une taxe carbone. Formellement on a

$$S'(t) := \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \mathbf{1}\{\Delta V'(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) > 0\} f(\alpha) d\alpha$$

$$= \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \mathbf{1}\{\Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) > -\Delta k\} f(\alpha) d\alpha \quad \Big(\{\Delta V > 0\} \cap \{0 > \Delta V > -\Delta k\} = \emptyset\Big)$$

$$= \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \big(\mathbf{1}\{\Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) > 0\} + \mathbf{1}\{0 > \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) > -\Delta k\}\big) f(\alpha) d\alpha$$

$$= \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \mathbf{1}\{\Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) > 0\} f(\alpha) d\alpha + \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \mathbf{1}\{0 > \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) > -\Delta k\} f(\alpha) d\alpha$$

$$= S(t) + \underbrace{\int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \mathbf{1}\{0 > \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) > -\Delta k\} f(\alpha) d\alpha}_{\geq\ 0} \geq S(t)$$

5.6 Démonstrations de la partie 4

Preuve 5.11 (Lemme 7) *On considère les subventions comme fixées. La preuves est similaires à celle du Lemme 2.*

Avec l'utlité CRRA

<u>$(p_1 + t)/(p_2 - \tilde{t}) < \alpha$ *:*</u>

$$c_1^{T/S} = \big(\frac{p_1 + t}{\theta}\big)^{-\frac{1}{\sigma}} \alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \quad , \quad c_0^{T/S} = I - \big(\frac{1}{\theta}\big)^{-\frac{1}{\sigma}} \big(\frac{p_1 + t}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

$$\tilde{t} c_2^{T/S} = \int_{\frac{p_1+t}{p_2-\tilde{t}}}^{\overline{\alpha}} t \big(\frac{p_1 + t}{\theta}\big)^{-\frac{1}{\sigma}} \alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} f(\alpha) d\alpha$$

<u>$(p_1 + t)/(p_2 - \tilde{t}) > \alpha$ *:*</u>

$$c_2^{T/S} = \big(\frac{p_2 - \tilde{t}}{\theta}\big)^{-\frac{1}{\sigma}} \quad , \quad c_0^{T/S} = I - \big(\frac{1}{\theta}\big)^{-\frac{1}{\sigma}} (p_2 - \tilde{t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

Preuve 5.12 (Lemme 8) *Voir Démonstration du Lemme 3.*

Preuve 5.13 (Proposition 3) • *Avec $\sigma < 1$:*

<u>$c_2^{LF} \rightarrow c_2^{T/S}$</u>

$$\Delta V = p_2 c_2^{LF} - (p_2 - \tilde{t})c_2^{T/S} + \theta\big(v(c_2^{T/S}) - v(c_2^{LF})\big)$$

$$= \theta^{\frac{1}{\sigma}} \underbrace{\Big((p_2 - \tilde{t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - p_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big)}_{>\ 0} \underbrace{\big(\frac{\sigma}{1-\sigma}\big)}_{>\ 0} > 0$$

$\underline{c_1^{LF} \to c_2^{T/S}}$

$$\Delta V = p_1 c_1^{LF} - (p_2 - \tilde{t})c_2^{T/S} + \theta\big(v(c_2^{T/S}) - v(\alpha c_1^{BT})\big)$$

$$= \theta^{\frac{1}{\sigma}} \underbrace{\Big(\big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - (p_2 - \tilde{t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big)}_{(*)} \underbrace{\big(-\frac{\sigma}{1-\sigma}\big)}_{<0}$$

— *Si* $p_1/(p_2 - \tilde{t}) < \alpha$*, alors* $(*) > 0$ *et* $\Delta V < 0$.
— *Si* $p_1/(p_2 - \tilde{t}) > \alpha$*, alors* $(*) < 0$ *et* $\Delta V > 0$.

$\underline{c_1^{LF} \to c_1^{T/S}}$

$$\Delta V = p_1 c_1^{LF} - (p_1 + t)c_1^{T/S} + \theta\big(v(\alpha c_1^{T/S}) - v(\alpha c_1^{LF})\big)$$

$$= \theta^{\frac{1}{\sigma}} \underbrace{\Big(\big(\frac{p_1}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \big(\frac{p_1 + t}{\alpha}\big)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big)}_{>0} \underbrace{\big(-\frac{\sigma}{1-\sigma}\big)}_{<0} < 0$$

Il est intéressant de noter que la même Démonstration avec $\sigma > 1$ *conduit au même résultat pour toutes les catégories.*

Preuve 5.14 (Lemme 9) *Désormais un consommateur choisit* c_2 *si* $V(c_2^{LF}) > V(\alpha c_1^{LF})$.

$$V(c_2^{LF}) > V(\alpha c_1^{LF})$$
$$I - p_2 c_2^{LF} + \theta v(c_2^{LF}) - c_F > I - p_1 c_1^{LF} + \theta v(\alpha c_1^{LF})$$
$$\underbrace{\theta v(c_2^{LF}) - p_2 c_2^{LF}}_{constant\ avec\ \alpha} + \underbrace{\big(p_1 c_1^{LF} - \theta v(\alpha c_1^{LF})\big)}_{décroissant\ en\ \alpha} > c_F$$

Or en $\alpha = p_1/p_2$,

$$\theta v(c_2^{LF}) - p_2 c_2^{LF} + p_1 c_1^{LF} - \theta v(\alpha c_1^{LF}) = 0$$

Donc il pourrait exister un seuil α_F*, inférieur à* p_1/p_2 *où* $V(c_2^{LF}) = V(\alpha_F c_1^{LF})$*. Il est nécessaire d'avoir la condition* $\alpha_F > \underline{\alpha}$*, i.e.*

$$\theta v(c_2^{LF}) - p_2 c_2^{LF} + p_1 c_1^{LF} - \theta v(`\underline{\alpha} c_1^{LF}) > c_F$$

Sinon il n'existe pas de α *tel que* $V(c_2^{LF}) > V(\alpha c_1^{LF})$.

- *Preuve que* $V(\alpha c_1^{LF})$ *est croissant en* α :

$$\frac{\partial V(\alpha c_1^{LF})}{\partial \alpha} = -p_1 \frac{\partial c_1^{LF}}{\partial \alpha} + \theta \frac{\partial \alpha c_1^{LF}}{\partial \alpha} v'(\alpha c_1^{LF})$$

$$= -p_1 \frac{\partial c_1^{LF}}{\partial \alpha} + \theta \alpha \frac{\partial c_1^{LF}}{\partial \alpha} v'(\alpha c_1^{LF}) + \theta c_1^{LF} v'(\alpha c_1^{LF})$$

$$= \underbrace{\left(\theta \alpha v'(\alpha c_1^{LF}) - p_1\right)}_{= 0 \textit{ d'après la CPO}} \frac{\partial c_1^{LF}}{\partial \alpha} + \theta c_1^{LF} v'(\alpha c_1^{LF}) = \theta c_1^{LF} v'(\alpha c_1^{LF}) > 0$$

Car $v(\cdot)$ *est croissante donc* $v'(\cdot) > 0$.

Preuve 5.15 (Lemme 10) *La Démonstration est semblable à celle du Lemme 9, en comparant cette fois-ci* $V(c_2^*)$ *et* $V(c_1^*)$.

Preuve 5.16 (Proposition 4) $\underline{c_2^{LF} \to c_2^*}$

$$\Delta V'(p_1, p_2, \alpha, \theta) = V(c_2^*) - c_F - \left(V(c_2^{LF}) - c_F\right) = \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta)$$

Donc le Lemme 4 s'applique.

$\underline{c_1^{LF} \to c_2^*}$

$$\Delta V'(p_1, p_2, \alpha, \theta) = V(c_2^*) - c_F - V(c_1^{LF}) = \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta) - c_F$$

c_F *ne dépend pas de* α, *donc le Lemme 4 s'applique ici.*

$\underline{c_1^{LF} \to c_1^*}$

$$\Delta V'(p_1, p_2, \alpha, \theta) = V(c_1^*) - V(c_1^{LF}) = \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta) - c_F$$

Donc le Lemme 4 s'applique.

Introduire un coût fixe pour utiliser c_2 *ne modifie pas les résultats obtenus dans le Lemme 4, la variation de* $\Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta)$ *est monotone en* α *(constant puis décroissante) donc on peut appliquer le Théorème de l'électeur médian.*

Preuve 5.17 (Lemme 11)

$$\Delta V'(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) = \beta T + \Delta \tilde{V}(p_1, p_2, \alpha, \theta, t)$$

$$= T + \tilde{V}(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) + (\beta - 1)T$$

$$= \Delta V(p_1, p_2, \alpha, \theta, t) + (\beta - 1)T$$

D'où

$$\Delta V'(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) < \Delta V(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) \;\; if \;\; \beta < 1$$

Preuve 5.18 (Proposition 5)

$$(1-\beta)T \geq \Delta V(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow T - \beta T \geq T + \Delta\tilde{V}(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq \beta T + \Delta\tilde{V}(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) \geq (\beta-1)T$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq \Delta V'(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) \geq (\beta-1)T$$

Ainsi, tous les individus avec un tel α *deviennent opposés à l'introduction de la taxe carbone en raison du pessimisme sur la redistribution.*

$$S(t) = \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \mathbf{1}\{\Delta V(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) > 0\} f(\alpha) d\alpha$$

$$= \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \mathbf{1}\{(1-\beta)T + \Delta V'(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) > 0\} f(\alpha) d\alpha$$

$$= \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \mathbf{1}\{\Delta V'(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) > (\beta-1)T\} f(\alpha) d\alpha \quad \Big(\{\Delta V' > 0\} \cap \{0 > \Delta V' > (\beta-1)T\} = \emptyset\Big)$$

$$= \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \mathbf{1}\{\Delta V'(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) > 0\} f(\alpha) d\alpha + \int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \mathbf{1}\{0 > \Delta V'(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) > (\beta-1)T\} f(\alpha) d\alpha$$

$$= S'(t) + \underbrace{\int_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \mathbf{1}\{0 > \Delta V(p_1,p_2,\alpha,\theta,t) > (\beta-1)T\} f(\alpha) d\alpha}_{\geq\, 0}$$

$$\geq S'(t)$$